A HISTÓRIA QUE MALBA TAHAN NÃO CONTOU

Francisco de A.F. de Mello [1]

Dizem que esta história é real, mas eu tenho sérios motivos para duvidar disso. Vou contá-la.

Na antiga Pérsia houve um califa, um sábio califa que, já velho, quiz testar a sabedoria de dois matemáticos que tinha a seu serviço. E os chamou, certa vez, e lhes disse.

- Oh, cheiques [2] que muito me honrais, como sabeis, estou doente e com idade avançada. Daquí a dez dias completarei 87 anos e vos peço que encontreis uma fórmula com a qual eu possa calcular a soma dos números dos anos que já vivi. Assim, a cada aniversário, irei obtendo a soma desses números, enquanto Allah permitir que eu esteja convosco.

- Que Allah o permita por muitos anos, disseram os calculistas.

- E agora podeis vos retirar. Daquí a dez dias, neste mesmo local e hora, devereis estar para que eu possa aprender o que desejo. Que Allah vos ilumine.

Os cheiques responderam: - Fiqueis na paz de Allah, grande califa.

---

[1] Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", USP, Piracicaba.

[2] Hoje diz-se, em português, xeque e não cheique.

E, os matemáticos se foram.

No dia, hora e local combinados, os três se encontraram.

- Que Allah esteja conosco, disse o califa.

- Que Allah esteja conosco, disseram os matemáticos.

- Omar, você é o mais velhos dos dois. Se encontrou a fórmula, explique-nos como procedeu e como ela é, disse o califa.

- Sim, encontrei-a facilmente usando a expressão da progressão aritmética que fornece a soma dos primeiros números naturais. Com uma simples adaptação obtive o resultado desejado. Assim

$$S = \frac{n\ (a_1 + a_n)}{2}$$

onde $a_1 = 1$ e $n = a_n$ = a vossa idade atual.

- Como o califa completa hoje 87 anos, a soma dos números de anos vividos por vós é

$$S = \frac{87\ (1 + 87)}{2}$$

oquê dá como resultado 3.828 anos. No próximo ano será

$$S = \frac{88\ (1 + 88)}{2}$$

oquê resulta em 3.916 anos.

- Muito me satisfaz vossa explicação, caro Omar.

E, voltando-se para o outro matemático, falou:

- Jovem Hamed, se encontrou a fórmula, explique-nos como procedeu e como ela é.

- Sim encontrei-a, disse Hame com ar superior. Mas a matemática se torna enfadonha quando se vai resolver problema simples como o proposto. Assim sendo, para torná-la mais atraente, seguí um processo mais complicado.

E expoz o seu trabalho.

- Considerei, em primeiro lugar, a fórmula geral do trinômio do segundo grau:

$$y = ax^2 + bx + c$$

- A seguir, atribui a x valores crescentes, 1, 2, 3, ... m e obtive os resultados abaixo.

$$y_1 = a + b + c$$

$$y_2 = 4a + 2b + c$$

$$y_3 = 9a + 3b + c$$

$$y_4 = 16a + 4b + c$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = m^2a + mb + c \qquad (1)$$

- Portanto,

$$y_1 = a + b + c$$

$$y_2 = 3a + b + y_1$$

$$y_3 = 5a + b + y_2$$

$$y_4 = 7a + b + y_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = (2m - 1)a + b + y_{m-1}$$

- Somando, agora, membro a membro, as últimas expressões, obtive:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_m = a + 3a + 5a + 7a + \dots + (2m - 1)a + mb + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{m-1} + c$$

$$y_m = a + 3a + 5a + 7a + \dots + (2m - 1)a + mb + c$$

$$y_m = [1+3+5+7+\dots+(2m-1)]a+mb+c \qquad (2)$$

- As expressões (1) e (2) são iguais a y_m. Portanto:

$$[1+3+5+7+\dots+(2m-1)]a+mb+c = m^2a + mb + c$$

- Daí deduzi que

$$1+3+5+7+\dots+(2m-1) = m^2$$

- Ou seja, a soma dos m primeiros números ímpares é igual a m^2.

- Ora, como um número par é igual ao seu antecessor ímpar mais 1 (e exemplificou).

1	3	5	7	9	11...
2	4	6	8	10	12...
(1+1)	(3+1)	(5+1)	(7+1)	(9+1)	(11+1)

a soma dos m primeiros números pares é

$$S = m^2 + m \quad \text{ou} \quad S = m\,(m+1)$$

- Então, a soma dos primeiros números naturais, sendo o último par, será igual à soma dos números ímpares mais a soma dos números pares. Assim.

$$S = m^2 + m^2 + m \quad \text{ou} \quad S = m\,(2m+1) \qquad (3)$$

- Como um número par é igual ao número impar que o segue na série dos números menos um, sendo m ímpar m - 1 será par. É fácil entender que a soma dos primeiros números naturais, sendo o último ímpar, será calculada assim:

$$S = m^2 + (m-1)^2 + (m-1) \quad \text{ou} \quad S = m(2m-1) \qquad (4)$$

- E, combinando-se as fórmulas (3) e (4) numa só expressão obtem-se a fórmula que pedistes há dez dias passados, grande califa (Allh convosco):

$$S = m\ (2m \pm 1)$$

onde m é o número de números ímpares. Usa-se o sinal de subtração quando o último número da série for ímpar e o sinal de adição quando ele for par.

- Como o grande califa completa hoje 87 anos a soma dos números de anos já vivos por vós é

$$S = 44(2 \times 44 - 1)$$

pois na série dos números de 1 a 87 existem 44 números ímpares. No próximo ano, neste mesmo dia e mês tereis vivido (que Allah o permita) 88 anos e a soma dos anos vividos será

$$S = 44\ (2 \times 44 + 1)$$

que é igual a 3.916 anos.

- Como podeis ver os resultados são os mesmos obtidos pelo venerável Omar.

- Orgulho-me de vós, Hamed pois conheceis os caminhos da matemática, disse o califa. Mas não sois sábio, pois desconheceis a grandeza da simplicidade.

- Dizei-me, Hamed, quando ides ao templo preferís caminhar pelas ruas largas, seguras ou pelas vielas tortuosas, escuras, onde podereis ser assaltado por malfeitores?

- Pela rua larga e segura, respondeu Hamed.

E o califa concluiu: - Assim deveis proceder em todos os atos de vossa vida. O caminho largo e seguro é também o mais simples para se caminhar.

E despediu-se dos matemáticos com uma grande lição ao jovem e orgulhoso Hamed.