Rev. de Agricultura, Piracicaba, Vol. 66, fasc. 1, 1991

SENSIBILIDADE DE DIFERENTES TESTES DE HOMOGENEIDADE DAS VARIÂNCIAS(1)

V. Nagai[2]
A. Conagin[3]
T. Igue[2]

INTRODUÇÃO

A análise da variância, de emprego tão freqüente no estudo de resultados de experimentos agronômicos, ou de outras áreas da ciência, requer, para validade de sua aplicação, que sejam observadas algumas hipóteses básicas, como as de aditividade dos efeitos, normalidade, independência e homogeneidade dos erros experimentais.

Em experimentos com fungicidas, herbicidas ou inseticidas, em geral, a variância do tratamento testemunha é maior que a das parcelas tratadas. Em estudo com plantas perenes, é comum, nos primeiros anos de produção, a ocorrência de variâncias heterogêneas. Esse problema é também observado quando os experimentos se localizam em solos não homogêneos, apesar de feita tentativa de controle local.

CONAGIN **et alii** (1990) demonstraram que a heterogeneidade de variâncias tem bem menos importância do que se supunha para a aplicação correta, na comparação de médias, dos testes de Bonferroni, de Tukey e t de Student. Apesar disso, há interesse em testar a heteroge-

---

[1] Parcialmente financiado pela FAPESP.

[2] Seção de Técnica Experimental e Cálculo do Instituto Agronômico de Campinas (IAC). Caixa Postal 28 - CEP 13001 Campinas (SP).

[3] Pesquisador Científico aposentado do IAC.

neidade de variâncias, que pode, em casos extremos, levar a erros graves nas conclusões.

A necessidade de verificar a hipótese de homogeneidade das variâncias é freqüente. Alguns métodos têm sido propostos com essa finalidade, tais como os de Cochran (1947), Fmáx. de Hartley (1950), os quais envolvem operações muito simples, ou o de Bartlett (1937), indicados para experimentos inteiramente casualizados, ou, ainda, os testes de Han (1969) e de Shukla (1972), de aplicação um pouco mais complexa e recomendados para delineamento em blocos ao acaso.

É bastante comum encontrar situações, de aplicação incorreta do teste de Bartlett, em experimentos em blocos ao acaso, nos quais, habitualmente, se calculam os erros dentro de tratamentos e não se leva em consideração que, nesses casos, as variâncias amostrais não são independentes entre si, já que o quadrado médio do resíduo não é a média das variâncias amostrais dentro dos tratamentos (Demétrio, 1984; Pimentel Gomes, 1986).

Na aplicação dos testes de Cochran e Fmáx., existem restrições de uso que implicam a exigência de um mesmo número de repetições para os tratamentos. O teste proposto por Shukla, segundo o autor, é invariante às diferenças de efeitos de tratamentos, o que não ocorreria com o teste de correlação múltipla proposto por Han.

Neste trabalho, pretende-se verificar a sensibilidade desses testes, considerando dois níveis de precisão experimental, duas amplitudes de efeitos de tratamentos e quatro níveis de heterogeneidade, partindo-se da hipótese de condições de normalidade.

MATERIAL E MÉTODOS

Com base em uma distribuição uniforme, foram geradas variáveis aleatórias Z(I,J), com I = 1,2,..., k e J = 1,2,...,r onde Z(I,J) ~ N(0,1). Estabeleceu-se para Z(I,J) uma limitação de impor ao processo uma amplitude de -4,9 a 4,9 da distribuição normal, o que dá a probabilidade de um em cem mil de obter um valor raro. Isso foi feito porque estamos considerando um grande número de experimentos simulados e, ainda, porque os experimentos realizados normalmente na prática representam uma amostra pequena da população, cujos resultados estão, de modo geral, dentro de determinada amplitude característica para a variável em estudo.

Para k = 5 e r = 8, foram simulados experimentos em blocos ao acaso, adotando-se, para a média, para os efeitos de blocos e de tratamentos, os valores obtidos normalmente com cereais. Foram adotados, ainda, dois níveis de precisão (CV = 15% e CV = 25%) com fatores de heterogeneidade iguais a 1 (homogeneidade), e valores da relação variância maior/variância menor iguais a 4, 7 e 16. Para cada nível de precisão, efeitos de tratamentos e níveis de heterogeneidade, foram simulados 500 ensaios no total de 8.000 simulações, compondo os seguintes casos:

Precisão: .... CV = 15%; CV = 25%
Efeito dos tratamentos: ... (1) 180, 100, -80, -80, -120;
(2) 250, 100, -80, -80, -190.

Níveis de heterogeneidade:

1: Z(1,J); Z(2,J); Z(3,J); Z(4,J); Z(5,J);
4: Z(1,J)x0,65; Z(2,J)x1,30; Z(3,J)x1,00; Z(4,J)X0,825; Z(5,J)x1,175;
7: Z(1,J)x0,55; Z(2,J)x1,45; Z(3,J)x1,00; Z(4,J)x0,775; Z(5,J)x1,125;
16: Z(1,J)x0,4; Z(2,J)x1,6; Z(3,J)x1,0; Z(4,Jx0,700; Z(5,J)x1,3.

Em todos os casos foram considerados os seguintes efeitos de blocos: 130, 100, 60, 0, -30, -60, -80, -120.

Em cada um dos ensaios, analisados com o modelo: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$, foi feita a aplicação dos testes de Cochran, de Hartley ($F_{máx}$) e de Bartlett sem correção. Os testes de Cochran, de Hartley e de Bartlett foram feitos também sobre a variável y_{ij} original após retirar dela o efeito de blocos (β_j) e fazer a correção para o número de graus de liberdade para cada tratamento.

Os testes estudados têm as seguintes característi-cas:

TESTE DE BARTLETT:

Nas condições da pesquisa, os tratamentos dispõem, do mesmo número de repetições (r), sendo, por isso, adotada a fórmula, já simplificada, a seguir:

$$M = 2{,}3026\ (r-1)\ [k \log \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^{k} \log s_i^2]$$

e, o fator de correção, $C = 1 + \frac{k+1}{3k(r-1)}$

onde:

s_i^2 - estimativa de variância para cada amostra;

$\bar{s}^2$ - média ponderada das estimativas das variâncias amostrais.

Para pequenas amostras, Bartlett demonstrou que M/C tem distribuição aproximada de χ^2 com k-1 graus de liberdade, onde k é o número de tratamentos.

Nos casos em estudo, o valor crítico de χ^2 = 9,49 para α = 0,05.

PIMENTEL GOMES (1985) referindo-se a pesquisa de BOX (1953) comenta que o teste de Bartlett "para comparação de estimativas de variâncias é tão sensível à falta de normalidade que deve ser abandonado".

CONAGIN (1950) propôs uma modificação do teste de Bartlett para blocos ao acaso e quadrado latino. No primeiro delineamento, a decomposição efetuada dos graus de liberdade é a seguinte:

Entre tratamentos: k-1;
Dentro de tratamentos: .... k(r-1);
Total: rk-1

A variância dentro de tratamentos pode ser decomposta em:

Entre blocos: r-1
Resíduo: .... (k-1)(r-1)

A eliminação da parte sistemática devida a blocos retira (r-1) graus de liberdade da variação dentro dos tratamentos. O efeito de blocos afeta os valores observados e deve, portanto, ser eliminado para obter estimativas, imparciais, unicamente da parte aleatória.

Assim, cada variância de tratamento corrigida, nos blocos ao acaso, deverá ter:

$$r-1 - \frac{r-1}{k} = nf$$

graus de liberdade e a variância global (resíduo):

$$k\ \left[(r-1) - \frac{r-1}{k}\right] = (r-1)\ (k-1)\ g.l.$$

Neste trabalho, a correção dos graus de liberdade é feita também para os testes de Cochran e $F_{máx.}$ para comparação com os correspondentes, sem correção.

TESTE DE COCHRAN

Aplicado para k amostras indeoendentes:

$$C = \frac{s^2\ máx}{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}$$

O valor obtido é comparado com o tabelado, DIXON e MASSEY (1951) com k e r graus de liberdade.

TESTE DE HARTLEY

Aplicado para k amostras independentes:

$$F_{máx.} = \frac{s^2 máx.}{s^2 min.}\ .$$

O valor obtido é comparado com o da tabela com k e r-1 graus de liberdade.

TESTE DE HAN

Considerado o modelo:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_1 + \beta_j + e_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,k \\ j = 1,2,\ldots,r \text{ com } r > k \end{array}$$

Calcula-se o coeficientes de correlação múltipla R usando as r linhas como indivíduos, obtendo-se:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \quad \frac{r - k}{k - 1} ,$$

que tem, sob a hipótese de nulidade, uma distribuição de F com (k-1) e (r-k) graus de liberdade.

Quando r é grande, rR tende a uma distribuição de χ^2 com k-1 graus de liberdade.

TESTE DE SHUKLA

A partir do modelo matemático na forma:

$$\underset{\sim}{Y}_j = \underset{\sim}{1}\mu + \underset{\sim}{\alpha} + \underset{\sim}{1}\beta_j + \underset{\sim}{e}_j ,$$

Shukla define a matriz L_t de ordem (t-1)xt, onde t é o número de tratamentos tal que: $L_t \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$; $L_t L_t' = I$ e obtém o vetor $Z_j = L_t Y_j$ de t - 1 componentes entre as observações no bloco j(j = 1,2,...,r), (r = número de repetições).

Demonstra-se que: $E(\underset{\sim}{Z}j) = L_t(\underset{\sim}{\alpha})$ e a variância de

$$\underset{\sim}{Z}_j = L_t \; \Sigma \; L_t = V .$$

Sob a hipótese de nulidade, $V(Zj) = \sigma^2 I$.

A partir da estimativa de V, obtém-se o teste estatístico, definido por:

$$\lambda = [\; |S|^{r/2}] \; / \; \{[\; tr\; (S)/p]^{rp/2}\} \qquad \text{onde } p = t-1.$$

Sob a hipótese de homogeneidade das variâncias:

$$-2\;\rho\;\log_e \lambda, \text{ onde } \rho = 1 - [2p+p^2+2)/6p(n-1)],$$

tem distribuição aproximada de χ^2 com t(t-1) /2-1 graus de liberdade.

Foi feita a análise da variância das porcentagens de rejeição, transformadas em arc sen $\sqrt{p\%/100}$, dos diferentes testes, considerando os fatores heterogeneidade, coeficiente de variação, amplitude dos efeitos e interações correspondentes.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Usando-se $\alpha = 0{,}05$, e sob condições de homogeneidade, espera-se, em uma grande sequência de ensaios, rejeição em 5% dos casos; essa porcentagem cresceu com o aumento do grau de heterogeneidade, como se vê no Quadro I.

Verifica-se, ainda, nesse quadro, que, na suposição de homogeneidade de variâncias, o teste de Shukla superestimou os valores esperados.

Os testes de Bartlett, Cochran e $F_{máx.}$, com os dados não corrigidos para o efeito de blocos, apresentaram, sempre, maior porcentagem de rejeição que o correspondente, feito com a correção para blocos; esses resultados parecem indicar que a não correção para blocos superestimou a porcentagem de rejeição da hipótese de nulidade. Na homogeneidade, os resultados estiveram dentro do limite esperado, de 5%, ocorrendo o mesmo com o teste de Han. Este último, no entanto, foi pouco sensível à heterogeneidade das variâncias, mesmo quando a relação entre a maior e a menor é da ordem de 16 vezes. Os valores observados são sempre inferiores aos dos outros testes.

Os resultados da análise da variância das porcentagens de rejeição (Quadro II), dos diferentes testes, considerando os fatores heterogeneidade, coeficiente de variação, amplitude dos efeitos e interações correspondentes, mostraram que todos eles foram sensíveis ao fator heterogeneidade. O teste de Cochran, corrigido para blocos, o de Bartlett e $F_{máx.}$, não corrigidos, e o teste de Shukla, foram influenciados pelo coeficiente de variação; o fator efeito de tratamentos influiu apenas nos resultados do teste de Shukla e Cochran não corrigido; vê-se, no quadro II, que algumas interações também foram significativas. Nos níveis mais altos de heterogeneidade, os testes de Bartlett e $F_{máx.}$, sem correção, para blocos, foram sensíveis ao coeficientes de variação.

CONCLUSÕES

1) Em condições de homogeneidade, a porcentagem de rejeição da hipótese de nulidade (H_o) foi superestimada pelo teste de Shukla.

2) Os testes de Bartlett, Cochran e Hartley, aplicados nos dados com remoção de efeitos de blocos, apresentaram, em condições de heterogeneidade das variâncias, menor porcentagem de rejeição que os feitos com os dados correspondentes não corrigidos.

3) O teste de Han mostrou-se pouco sensível à variação dos índices de heterogeneidade.

4) Não se observou, à exceção dos testes de Shukla e de Cochran, não corrigidos, efeito significativo da magnitude dos efeitos de tratamentos sobre a porcentagem de rejeição de H_o.

5) A heterogeneidade das variâncias, é o fator mais importante de separação no poder discriminativo dos vários testes sobre a porcentagem de rejeição da hipótese.

6) Na presença de heterogeneidade acentuada, os testes de Bartlett e $F_{máx.}$, não corrigidos, foram sensíveis ao aumento do valor do coeficiente de variação.

RESUMO

Para sua validade, a análise de variância é fundamentada em algumas hipóteses, como: efeitos aditivos no modelo e erros independentes, com distribuição normal e variâncias homogêneas. O poder discriminativo dos testes de Bartlett, de Cochran e de Hartley, com e sem ajustamento para blocos, e os de Han e de Shukla, empregados para testar a hipótese de homogeneidade de variâncias, foi avaliado em 500 experimentos simulados para cada um dos casos em que se fizeram variar os efeitos de tratamentos, os coeficientes de variação e a magnitu-

Quadro I - Porcentagens de rejeição da hipótese de nulidade H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots \sigma^2$ nos testes de Bartlet não corrigido (B) e com correção (BC); Cochran não corrigido (C) e com correção (CC); Hartley não corrigido ($F_{máx.}$) e com correção ($F_{máx.}$(C); Han (Hn) e Shukla (S), considerando diferentes níveis de heterogeneidade (He), coeficientes de variação (CV) e efeitos de tratamentos (Ef).

H	CV	Ef	BC	CC	$F_{máx}$ C	B	C	$F_{máx.}$	Hn	S
						%				
He1	15	1	1,8	1,2	2,2	2,8	3,6	3,2	4,2	9,6
He1	12	5	2,2	2,0	2,0	2,2	4,8	3,2	4,4	15,4
He1	25	1	2,0	1,2	2,2	3,2	4,4	3,6	6,2	11,6
He1	25	2	1,6	1,5	3,0	3,8	5,0	3,8	3,6	11,2
He4	15	1	3,8	5,4	4,2	17,6	18,6	16,8	5,4	15,4
He4	15	2	4,6	6,8	4,6	17,2	22,0	15,6	4,2	18,6
He4	25	1	6,0	5,6	4,6	23,4	20,0	23,0	6,4	17,8
He4	25	2	4,2	4,4	4,2	23,2	20,2	22,4	7,6	17,0
He7	15	1	11,8	12,8	9,8	34,0	29,6	32,8	7,8	28,8
He7	15	2	8,2	8,4	8,6	35,6	28,6	30,4	7,9	25,4
He7	25	1	12,0	9,2	8,8	44,2	29,2	39,2	9,6	28,8
He7	25	2	10,6	9,4	10,8	42,6	33,2	38,4	9,8	26,2
He16	15	1	23,8	19,0	19,8	68,2	43,2	59,2	10,8	43,2
He16	15	2	22,6	18,0	18,4	62,4	47,6	57,0	10,8	42,8
He16	25	1	24,4	15,0	20,4	77,8	46,2	74,6	14,2	47,2
He16	25	2	20,6	16,2	16,2	78,8	47,4	75,6	15,0	43,6

Ef1 = 180, 100, -80, -80; -120; Ef 2 = 250, 100, -80, -80, -190

Quadro II - Valores do teste F, significativos, na análise da variância ($P < 0,05$), por teste, para as seguintes fontes de variação (FV): níveis de heterogeneidade (HE), coeficiente de variação (CV), efeitos de tratamentos (EF) e interações duplas.

FV	BC	CC	$F_{máx}C$	B	C	$F_{máx}$	Hn	S
HE	200,21	125,04	157,22	139,78	406,78	810,80	33,58	241,17
CV	ns	3,73	ns	73,12	ns	58,82	ns	4,00
EF	ns	ns	ns	ns	5,09	ns	ns	5,56
HExCV	ns	ns	ns	6,19	ns	9,52	ns	8,76
HExEF	ns	ns	ns	ns	ns	ns	ns	13,02
CVxEF	ns	ns	ns	ns	ns	ns	ns	ns

ns = não significativo
BC, CC e $F_{máx}.C$ = testes de Bartlett, Cochran e $F_{máx}$ com correção para blocos
B, C e $F_{máx}$ = testes de Bartlett, Cochran e $F_{máx}$ sem correção para blocos
Hn e S = testes de Han e Shukla, respectivamente.

de das variâncias dentro dos tratamentos. Os resultados mostraram que, nas condições pesquisadas, o poder discriminativo na rejeição da hipótese de nulidade de igualdade das variâncias é fortemente influenciado pela magnitude das diferenças entre as variâncias.

SUMMARY

SOME CONSIDERATIONS ON SEVERAL TESTS FOR THE HOMOGENEITY OF VARIANCES

Variables with normal distribution were used to simulate experiments in randomized block design, with five treatments and eight replications. The tests of homogeneity of variances proposed by Han, Shukla, the original Bartlett's and a modification of Bartlett's test proposed by Conagin besides that of Hartley and Cochran tests, were used in the case of two way classification, and compared in 8,000 experiments of simulated data. In this simulation it was considered two levels of precision (CV = 15% and CV = 25%), two ranges of treatment effects (180, -100, -80, -80, -120; 250, -100, -80, -80, -190) and four levels of heterogeneity (1, 4, 7, 16) defined by the relation s_i^2 greatest/s_i^2 smallest. Under conditions of homogeneity (heterogeneity = 1) the amount of rejection of the null hipothesis (H_0), for Shukla's test using α = 5% was higher than the expected 5%. Han's test showed small sensibility in rejecting the equality of variances for the last two higher degrees of heterogeneity. The discriminative power of the tests was strongly affected by the levels of heterogeneity used. The magnitude of treatment effects adopted and the level of experimental precision imposed in the process did not affect the percentage of rejection of H_0 in the tests considered, except for the tests of Bartlett and Fmáx in the two higher degrees of heterogeneity.

LITERATURA CITADA

BARTLETT, M.S., 1937. Properties of sufficiency and Statistical Tests, **Proc. of Royal Soc.**, series A, Vol. **160**, p.268-282.

COCHRAN, W.G., 1947. The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total. **Ann. Eugenics, 11**: 47-51.

CONAGIN, A., 1950. Uso do teste de Bartlett nos delineamentos fundamentais. In: **Seminários de Estatística Aplicada**, 3., Campinas, Instituto Agronômico, p. 109-113 (3a. série).

CONAGIN, A., V. NAGAI & T. IGUE, 1990. Poder Discriminativo de Diferentes Testes de Comparação de Médias. **Rev. Agric., 65**(2): 203-214.

DEMÉTRIO, C.G.B., 1984. Teste de homogeneidade de variâncias para ensaios em blocos casualizados. Piracicaba, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". 10p. Seminário Dep. Mat. e Estat. da ESALQ - USP.

DIXON, W.J. & F.J. MASSEY Jr., 1951. **Introduction to Statistical Analysis**. 1st ed., New York, McGraw-Hill Book Company. 370p.

HAN, Chien-Pai, 1969. Testing the homogeneity of variances in a two-way classification. **Biometrics, 25**(1): 153-158.

HARTLEY, H.O., 1950. The use of range in analysis of variance. **Biometrika, 37**: 271-280.

PIMENTEL GOMES, F., 1985. **Curso de Estatística Experimental**. 11ª edição, São Paulo, Livraria Nobel, 466p.

PIMENTEL GOMES, F., 1986. The separate estimation of variances of treatments in randomized complete block experiments. **Biometric Bulletin, 3**(4): 9.

SHUKLA, G.K., 1972. An invariant test for the homogeneity of variances in a two-way classification. **Biometrics, 28**(4): 1063-1072.